

0- 778997

На правах рукописи

*Е. Акимов* —

АКИМОВА ЕЛЕНА НИКОЛАЕВНА

**ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
ГРАВИ-МАГНИТОМЕТРИИ И УПРУГОСТИ  
НА МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ СИСТЕМАХ  
С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПАМЯТЬЮ**

05.13.18 — математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**  
диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Челябинск — 2009

Работа выполнена в Институте математики и механики УрО РАН.

Научный консультант: доктор физико-математических наук  
член-корр. РАН Владимир Васильевич Васин.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук  
член-корр. РАН Петр Сергеевич Мартышко,  
доктор физико-математических наук  
профессор Леонид Давидович Менихес,  
доктор физико-математических наук  
Михаил Владимирович Якобовский.

Ведущая организация: Институт вычислительной математики  
и математической геофизики СО РАН,  
г. Новосибирск

Защита состоится 14 октября 2009 г. в 12-00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.298.14 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук при Южно-Уральском государственном университете по адресу: 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Южно-Уральского государственного университета.

Автореферат разослан " \_\_\_\_ " сентября 2009 г.

НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА КГУ



0000641724

Ученый секретарь  
диссертационного совета Д 212.298.14  
доктор физ.-мат. наук, профессор

*СЛ*

Л.Б. Соколинский

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертационная работа посвящена проблеме построения прямых и итерационных параллельных алгоритмов и их использованию при решении линейных и нелинейных обратных задач гравиметрии и магнитометрии, задачи многокомпонентной диффузии, трехмерной задачи упругости и упруго-пластической задачи на многопроцессорных вычислительных системах с распределенной памятью.

### **Актуальность темы.**

Важнейшими задачами исследования структуры земной коры являются обратные задачи грави-магнитометрии: задача гравиметрии о нахождении переменной плотности в слое и структурные задачи грави-магнитометрии о восстановлении геологической границы. Задачи описываются линейными и нелинейными интегральными уравнениями Фредгольма первого рода и после дискретизации с использованием итерационных процессов сводятся к системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с плохо обусловленными заполненными матрицами большой размерности.

Важной задачей при моделировании структурных превращений в многокомпонентных сплавах является решение задачи диффузионного массопереноса, когда в каждый момент времени необходимо знать распределение концентраций диффундирующих компонентов. Диффузионный массоперенос описывается системой параболических дифференциальных уравнений. Для реальных задач система не является линейной и при использовании конечно-разностного метода на каждом шаге итерационной процедуры сводится к решению СЛАУ с блочно-трехдиагональными матрицами.

Важным объектом при выполнении расчетов нагрузок в конструкциях и деталях машин является решение трехмерной статической задачи упругости, которая описывается системой дифференциальных уравнений Ламе. Одним из эффективных методов решения задачи с хорошей точностью является метод граничных интегральных уравнений. После дискретизации задача сводится к решению СЛАУ с заполненными матрицами.

При моделировании технологических процессов решаются упруго-пластические задачи с большими пластическими деформациями. На основе принципа виртуальной мощности в скоростной форме с помощью конечно-элементной аппроксимации на каждом шаге нагрузки задача сводится к решению СЛАУ с ленточной матрицей большой размерности.

Таким образом, данные задачи описываются дифференциальными либо интегральными уравнениями и сводятся к решению СЛАУ.

Необходимость повышения точности результатов решения задач, в частности, использование более мелких сеток существенно увеличивает время вычислений. Одним из путей уменьшения времени расчетов и повышения

эффективности решения задач математического моделирования является распараллеливание алгоритмов и использование многопроцессорных вычислительных систем (МВС).

Проблемам распараллеливания алгоритмов посвящено множество статей и монографий отечественных и зарубежных авторов. Работы В.В. Воеводина<sup>1,2</sup> посвящены совместному исследованию параллельных численных методов и параллельных вычислительных систем. В качестве математических объектов, используемых как посредники для описания алгоритмов и МВС, применяются ориентированные графы. Среди работ, посвященных параллельным прямым и итерационным методам решения систем линейных уравнений, отметим обзоры В.Н. Фаддеевой и Д.К. Фаддеева<sup>3</sup>, монографии Е. Валяха, И.Н. Молчанова, Дж. Ортега<sup>4</sup>, сборник статей под редакцией Г. Родрига<sup>5</sup>, монографию под редакцией Д. Ивенса, и др.

Для исследования параллельных свойств и сравнения работы последовательного и параллельного алгоритма вводятся коэффициенты ускорения и эффективности:  $S_m = \frac{T_1}{T_m}$ ,  $E_m = \frac{S_m}{m}$ , где  $T_1$  — время выполнения последовательного алгоритма на одном процессоре,  $T_m$  — время выполнения параллельного алгоритма на МВС с числом процессоров  $m$  ( $m > 1$ ).  $T_m = T_c + T_o$  — совокупность чистого времени счета и накладных расходов. В общем случае эффективность распараллеливания  $0 < E_m < 1$ . В идеальном случае  $E_m$  близко к единице, но при решении практических задач она уменьшается за счет накладных расходов и дисбаланса нагрузки.

Основной целью при построении параллельных алгоритмов является получение максимального ускорения и эффективности:  $S_m \simeq m$  и  $E_m \simeq 1$ .

В некоторых случаях удается получить  $E_m > 1$ . Данный факт связан с уменьшением времени обращения к данным за счет кэш-памяти.

Рассмотрим некоторые подходы при построении параллельных алгоритмов. В работах Н.Н. Миренкова предлагается один из принципов создания параллельных алгоритмов — крупноблочно-иерархический подход к распараллеливанию. Схема параллельного алгоритма рассматривается как иерархическая структура, высший уровень которой — крупные и редко взаимодействующие блоки, выполняемые независимо, следующий уровень — подблоки крупных блоков, когда накладные расходы уже становятся существенными, третий уровень связывает свою работу с мелкими действиями.

Другой подход предложен в работе В.А. Вальковского, В.Е. Котова,

<sup>1</sup> Воеводин В.В. Математические модели и методы в параллельных процессах. М.: Наука, 1986. 296 с.

<sup>2</sup> Воеводин В.В., Воеводин В.В. Параллельные вычисления. СПб.: БХВ-Петербург, 2002. 599 с.

<sup>3</sup> Фаддеева В.Н., Фаддеев Д.К. Параллельные вычисления в линейной алгебре — 1,2. // Кибернетика. 1977. № 6. С. 28–40; 1982. №3. С. 18–31.

<sup>4</sup> Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. М.: Мир, 1991. 366 с.

<sup>5</sup> Параллельные вычисления / под ред. Г. Родрига. М.: Наука, 1986. 376 с.



А.Г. Марчука и Н.Н. Миренкова. Он включает в себя однородное распределение массивов и других структур данных по ветвям параллельного алгоритма. При таком распределении имеют место:

- 1) равенство объемов распределяемых частей массивов;
- 2) разделение массивов на части параллельными линиями;
- 3) дублирование массивов или частей одинаковым образом.

Один из подходов к распараллеливанию связан с методами разделения или декомпозиции областей, которые применяются при решении сеточных задач математической физики в областях сложной формы. Основная идея этих методов заключается в декомпозиции области, в которой ищется решение краевой задачи, на подобласти простого вида. Различные варианты методов разделения областей исследовались многими авторами в нашей стране (Е.С. Николаев и А.А. Самарский, В.К. Агапов, Ю.А. Кузнецов, С.А. Финогенов, А.М. Мацокин, В.И. Лебедев и В.И. Агошков, и др.).

В работах А.Н. Коновалова и Н.Н. Яненко вопросы распараллеливания вычислений рассматриваются с точки зрения изучения модульной структуры вычислительных алгоритмов для решения определенного класса задач (математической физики). Решение исходной задачи сводится к последовательному решению "простых" задач в стандартной области. Эти задачи названы базисными задачами, а последовательность решения таких задач, обеспечивающая решение исходной задачи, — представлением исходной задачи в данном базисе. Модуль есть программная реализация базисной задачи. Вычислительный алгоритм и программа одновременно приобретают модульную структуру. Модульная декомпозиция алгоритма упрощает его распараллеливание.

Специфика решения описанных в диссертации прикладных задач требует разработки параллельных алгоритмов и параллельных вычислительных технологий при реализации решения задач на МВС.

**Целью** диссертационной работы является построение прямых и итерационных параллельных алгоритмов для решения систем уравнений с точными и заполненными матрицами, исследование их устойчивости и эффективности распараллеливания и использование алгоритмов при решении линейных и нелинейных обратных задач гравиметрии и магнитометрии, задачи многокомпонентной диффузии и трехмерной задачи упругости.

**Методы исследования.** В диссертационной работе использован математический аппарат численных методов, теории некорректных задач и методы математического моделирования.

### **Научная новизна.**

Результаты, представленные в диссертации, являются новыми, имеют теоретическую и практическую ценность.

1. Построены прямые параллельные алгоритмы решения СЛАУ с пятидиагональными матрицами и параллельные алгоритмы матричной прогонки для решения СЛАУ с блочно-трехдиагональными матрицами.

2. Доказаны теоремы об устойчивости параллельных алгоритмов решения СЛАУ с трехдиагональными, пятидиагональными и блочно-трехдиагональными матрицами в зависимости от соотношения коэффициентов исходных систем уравнений.

3. Разработаны регулярные параллельные прямые и итерационные алгоритмы для решения линейной обратной задачи гравиметрии о восстановлении плотности в слое, трехмерной задачи упругости и осесимметричной упруго-пластической задачи.

4. Проведены основные этапы доказательных вычислений сходимости итеративно регуляризованного метода Ньютона для решения трехмерных нелинейных обратных задач гравиметрии и магнитометрии о нахождении поверхности раздела между средами.

5. Разработан и реализован на МВС-1000 комплекс параллельных программ решения линейной обратной задачи гравиметрии и нелинейных обратных задач грави-магнитометрии на основе метода Ньютона с использованием регулярных параллельных прямых (типа Гаусса) и итерационных (градиентного типа) алгоритмов.

6. На базе комплекса программ В.И. Машукова разработан и реализован на МВС-1000 комплекс параллельных программ МГИУ-2 решения трехмерной статической задачи упругости в ограниченных областях с различными типами граничных условий. В случае смешанных граничных условий реализован итерационный альтернирующий метод Шварца.

#### **Защищаемые положения.**

1. Предложены и исследованы с точки зрения корректности и устойчивости прямые параллельные алгоритмы решения систем уравнений с трехдиагональными, пятидиагональными и блочно-трехдиагональными матрицами, реализованные при решении линейной и нелинейной задачи многокомпонентной диффузии с анализом эффективности распараллеливания.

2. Разработаны эффективные регулярные параллельные прямые и итерационные алгоритмы, реализованные при решении линейной обратной задачи гравиметрии о восстановлении плотности в горизонтальной слоистой среде для областей Среднего Урала, трехмерной задачи упругости и осесимметричной упруго-пластической задачи.

3. Для решения трехмерных нелинейных обратных задач гравиметрии и магнитометрии о нахождении поверхности раздела между средами на основе итеративно регуляризованного метода Ньютона выполнены основные этапы доказательных вычислений сходимости метода, разработаны па-

параллельные вычислительные технологии и выполнены численные расчеты для реальных гравитационных и магнитных полей для различных областей (Средний Урал, Казахстан, Оренбург и Башкирия).

4. Разработан и реализован на МВС-1000 комплекс параллельных программ решения линейной обратной задачи гравиметрии и нелинейных обратных задач грави-магнитометрии на основе метода Ньютона с использованием регулярных параллельных прямых и итерационных алгоритмов.

5. Разработан и реализован на МВС-1000 комплекс параллельных программ МГИУ-2 решения трехмерной статической задачи упругости в ограниченных областях с различными типами граничных условий с использованием параллельных вычислительных технологий на всех этапах решения задачи и протестирован на серии модельных расчетов.

### **Практическая значимость.**

Разработанные в диссертационной работе и апробированные в расчетах параллельные алгоритмы и программы могут быть эффективно использованы при численном решении ряда задач математической физики на МВС.

В 2001 г. комплекс параллельных программ МГИУ-2 решения трехмерной задачи упругости методом граничных интегральных уравнений передан в Институт автоматики и процессов управления (ИАПУ) ДВО РАН для решения задач упругости на многопроцессорном комплексе МВС-1000.

Комплекс параллельных программ решения линейной задачи гравиметрии о восстановлении плотности в слое и решения нелинейных задач грави-магнитометрии о нахождении поверхности раздела между средами успешно используется в реальных расчетах для различных областей совместно с сотрудниками Института геофизики УрО РАН (ИГФ УрО РАН).

Разработан специализированный Web-сервер, предназначенный для запуска программ, реализующих параллельные алгоритмы решения линейной обратной задачи гравиметрии на МВС-1000 через Web-интерфейс.

Разработанные параллельные алгоритмы легли в основу создания спецкурса "Параллельные вычисления" для студентов специальности "Математическое обеспечение и администрирование информационных систем".

**Апробация работы.** Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на Всероссийских и Международных конференциях и семинарах: Международных конференциях "Parallel Computing Technologies – PaCT" (Обнинск, 1993; Санкт-Петербург, 1995; Ярославль, 1997), Международных конференциях "Numerical Methods in Continuum Mechanics" (Липтовский Ян – Словакия, 2000; Жилина – Словакия, 2003), Восьмом Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Пермь, 2001), Дальневосточной школе – семинаре им. академика Е.В. Золотова (Владивосток, 2001), Международной конференции "Numerical

Methods and Computational Mechanics" (Мишкольц – Венгрия, 2002), Международных летних школах – конференциях "Advanced Problems in Mechanics – АРМ" (Санкт-Петербург, 2002, 2003, 2004), I, II и III Всероссийских конференциях, посвященных памяти академика А.Ф. Сидорова "Актуальные проблемы прикладной математики и механики" (Екатеринбург – Трубник, 2003; Абрау-Дюрсо, 2004; Абрау-Дюрсо, 2006), Всероссийской конференции "Декомпозиционные методы в математическом моделировании и информатике" (Москва, 2004), XIV Всероссийской конференции "Алгоритмический анализ неустойчивых задач" (Екатеринбург–Трубник, 2004), XV Всероссийской конференции "Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов для решения задач математической физики с приложением к многопроцессорным системам", посвященной памяти К.И. Бабенко (Абрау-Дюрсо, 2004), XI Всероссийской Школе-семинаре "Современные проблемы математического моделирования" (Абрау-Дюрсо, 2005), Международном семинаре им. Д.Г. Успенского "Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей" (Екатеринбург, 2006), XXIV Генеральной ассамблее международного союза геодезии и геофизики "Earth: our changing planet" (Перуджа – Италия, 2007), Международной конференции, посвященной 50-летию Института геофизики УрО РАН "Геофизические исследования Урала и сопредельных регионов" (Екатеринбург, 2008), V Международной конференции "Алгоритмический анализ неустойчивых задач, посвященной 100-летию со дня рождения В.К. Иванова" (Екатеринбург – Трубник, 2008), Международной конференции "Математические методы в геофизике – 2008" (Новосибирск, 2008), Международных конференциях "Параллельные вычислительные технологии – ПаВТ" (Челябинск, 2007; Санкт-Петербург, 2008; Нижний Новгород, 2009).

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 29 работах, в том числе в научных изданиях, рекомендованных ВАК [1–7], в рецензируемых российских и иностранных журналах [8–12]. В работе [3] Е.Н. Акимовой принадлежит разработка параллельных алгоритмов решения трехмерной задачи упругости с заданным на границе вектором усилий и выполнение модельных расчетов. В работах [4 – 5] Е.Н. Акимовой принадлежит разработка и реализация параллельного алгоритма матричной прогонки на МВС–1000 при решении задач многокомпонентной диффузии. В работах [6 – 8] Е.Н. Акимовой принадлежит разработка и реализация регулярных параллельных алгоритмов решения линейной обратной задачи гравиметрии о восстановлении плотности в слое. В работе [21] Е.Н. Акимовой принадлежит разработка регулярных параллельных алгоритмов решения упруго-пластической задачи. В работах [12,22 – 29] В.В. Васину при-

надлежит постановка проблемы, соискателю принадлежат все полученные результаты.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Объем диссертационной работы составляет 255 страниц. Библиография содержит 143 наименования.

Исследования по теме диссертации выполнены в период с 1990 по 2008 годы в Отделе некорректных задач анализа и приложений Института математики и механики УрО РАН.

Автор выражает искреннюю признательность своему учителю главному научному сотруднику ИВМиМГ СО РАН академику РАН Анатолию Николаевичу Коновалову.

Автор выражает благодарность за постановку ряда математических проблем, поддержку, полезные замечания и обсуждения заведующему Отделом некорректных задач анализа и приложений ИММ УрО РАН члену-корреспонденту РАН Владимиру Васильевичу Васину.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы проведенных исследований и дан обзор публикаций, близких к теме диссертации. Рассматриваются некоторые подходы и принципы к распараллеливанию алгоритмов, приводятся понятия эффективности и ускорения параллельных алгоритмов. Показано, что рассматриваемые в диссертационной работе прикладные задачи сводятся к решению СЛАУ с ленточными и заполненными матрицами большой размерности.

Во **введении** сформулирована цель работы, научная новизна и практическая значимость результатов, кратко изложено содержание работы.

**Первая глава** диссертации посвящена построению параллельных алгоритмов для решения систем уравнений с трехдиагональными, пятидиагональными и блочно-трехдиагональными матрицами коэффициентов и исследованию их устойчивости.

В §1 алгоритмы распараллеливания прогонки, предложенные А.Н. Коноваловым и Н.Н. Яненко<sup>6, 7</sup> для решения задачи Дирихле для трехточечного разностного уравнения на отрезке, обобщаются для решения СЛАУ с трехдиагональными матрицами. В §2 построены параллельные алгоритмы решения СЛАУ с пятидиагональными матрицами. В §1 и §2 проведено

<sup>6</sup> Яненко Н.Н., Коновалов А.Н., Бузров А.Н., Шустов Г.В. Об организации параллельных вычислений и распараллеливания прогонки // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ и ИТшПМ СО АН СССР, 1978. Т. 9. № 7. С. 139–146.

<sup>7</sup> Бузров А.Н., Коновалов А.Н. Об устойчивости алгоритма распараллеливания прогонки // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ и ИТшПМ СО АН СССР, 1979. Т. 10. № 6. С. 27–32.

исследование корректности и устойчивости параллельных алгоритмов в зависимости от соотношения коэффициентов исходных систем уравнений.

Исходный отрезок  $(0, n)$  разбивается на  $L$  интервалов распараллеливания  $(k, k + m)$ ,  $k = 0, m, \dots, n - m$  так, что  $n = L \cdot m$  (рис. 1). Точки разбиения отрезка  $k = 0, m, \dots, n$  выбираются в качестве узлов распараллеливания, а искомые неизвестные в узлах — в качестве параметров  $Y_k$ . Относительно  $Y_k$  строится редуцированная система уравнений, после решения которой остальные искомые неизвестные находятся на  $L$  интервалах независимо.

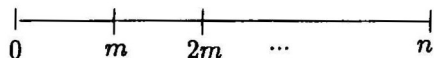


Рис. 1. Разбиение исходного отрезка на интервалы

Для решения систем уравнений с трехдиагональными матрицами

$$\begin{cases} C_0 Y_0 - B_0 Y_1 = F_0, & i = 0, \\ -A_i Y_{i-1} + C_i Y_i - B_i Y_{i+1} = F_i, & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ -A_n Y_{n-1} + C_n Y_n = F_n, & i = n. \end{cases} \quad (1)$$

редуцированная система уравнений относительно параметрических неизвестных  $Y_k$  имеет вид исходной системы (1) с коэффициентами  $\bar{A}_i, \bar{B}_i, \bar{C}_i, \bar{F}_i$ , но меньшую размерность.

Построим параллельный алгоритм 1 для решения систем уравнений с пятидиагональными матрицами:

$$\begin{cases} C_0 Y_0 - D_0 Y_1 + E_0 Y_2 = F_0, & i = 0; \\ -B_1 Y_0 + C_1 Y_1 - D_1 Y_2 + E_1 Y_3 = F_1, & i = 1; \\ A_i Y_{i-2} - B_i Y_{i-1} + C_i Y_i - D_i Y_{i+1} + E_i Y_{i+2} = F_i, & i = 2, \dots, n-1; \\ A_n Y_{n-2} - B_n Y_{n-1} + C_n Y_n - D_n Y_{n+1} = F_n, & i = n; \\ A_{n+1} Y_{n-1} - B_{n+1} Y_n + C_{n+1} Y_{n+1} = F_{n+1}, & i = n+1. \end{cases} \quad (2)$$

Исходный отрезок  $(0, n+1)$  разобьем на  $L$  пересекающихся интервалов вида  $(k, k+m)$  и  $(k+1, k+m+1)$ ,  $k = 0, m, \dots, n-m$  так, что  $n+1 = L \cdot m+1$  (рис. 2).

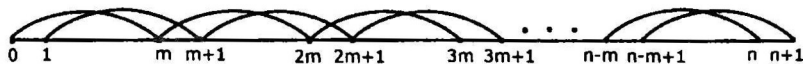


Рис. 2. Разбиение отрезка на пересекающиеся интервалы

Точки разбиения отрезка  $k, k+1$ ,  $k = 0, m, \dots, n$  выберем в качестве узлов распараллеливания, а неизвестные в узлах  $Y_k$  и  $Y_{k+1}$  — в качестве параметрических.

Для построения редуцированной системы уравнений введем оператор

$$\Delta_h Y_i \equiv A_i Y_{i-2} - B_i Y_{i-1} + C_i Y_i - D_i Y_{i+1} + E_i Y_{i+2}$$

и на интервалах  $(k, k + m + 1)$ ,  $k = 0, m, \dots, n - m$  рассмотрим задачи

$$\begin{aligned}\Delta_h U_i &= 0, & U_k &= 1, & U_{k+1} &= 0, & U_{k+m} &= 0, & U_{k+m+1} &= 0, \\ \Delta_h V_i &= 0, & V_k &= 0, & V_{k+1} &= 1, & V_{k+m} &= 0, & V_{k+m+1} &= 0, \\ \Delta_h P_i &= 0, & P_k &= 0, & P_{k+1} &= 0, & P_{k+m} &= 1, & P_{k+m+1} &= 0, \\ \Delta_h Q_i &= 0, & Q_k &= 0, & Q_{k+1} &= 0, & Q_{k+m} &= 0, & Q_{k+m+1} &= 1, \\ \Delta_h W_i &= F_i, & W_k &= 0, & W_{k+1} &= 0, & W_{k+m} &= 0, & W_{k+m+1} &= 0,\end{aligned}\quad (3)$$

где  $i = k + 2, \dots, k + m - 1$ .

Если  $U_i, V_i, P_i, Q_i, W_i$  — решения задач (3) на  $(k, k + m + 1)$ , то по принципу суперпозиции решение задачи (2) на  $(k, k + m + 1)$  будет иметь вид

$$Y_i = Y_k U_i + Y_{k+1} V_i + Y_{k+m} P_i + Y_{k+m+1} Q_i + W_i, \quad (4)$$

где  $Y_k, Y_{k+1}, Y_{k+m}, Y_{k+m+1}$  — параметрические неизвестные.

После подстановки выражения (4) в точках  $k, k + 1$ ,  $k = 0, m, \dots, n$  в исходную систему уравнений (2), получим редуцированную систему уравнений относительно параметрических неизвестных следующего вида

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{C}_0 Y_0 - \bar{D}_0 Y_1 + \bar{E}_0 Y_m - \bar{H}_0 Y_{m+1} &= \bar{F}_0, \\ -\bar{B}_1 Y_0 + \bar{C}_1 Y_1 - \bar{D}_1 Y_m + \bar{E}_1 Y_{m+1} - 0 \cdot Y_{2m} &= \bar{F}_1, \\ 0 \cdot Y_{k-2m+1} + \bar{A}_k Y_{k-m} - \bar{B}_k Y_{k-m+1} + \\ + \bar{C}_k Y_k - \bar{D}_k Y_{k+1} + \bar{E}_k Y_{k+m} - \bar{H}_k Y_{k+m+1} &= \bar{F}_k, \\ -\bar{G}_{k+1} Y_{k-m} + \bar{A}_{k+1} Y_{k-m+1} - \bar{B}_{k+1} Y_k + \\ + \bar{C}_{k+1} Y_{k+1} - \bar{D}_{k+1} Y_{k+m} + \bar{E}_{k+1} Y_{k+m+1} - 0 \cdot Y_{k+2m} &= \bar{F}_{k+1}, \\ 0 \cdot Y_{n-2m+1} + \bar{A}_n Y_{n-m} - \bar{B}_n Y_{n-m+1} + \bar{C}_n Y_n - \bar{D}_n Y_{n+1} &= \bar{F}_n, \\ -\bar{G}_{n+1} Y_{n-m} + \bar{A}_{n+1} Y_{n-m+1} - \bar{B}_{n+1} Y_n + \bar{C}_{n+1} Y_{n+1} &= \bar{F}_{n+1}, \end{aligned} \right. \quad (5)$$

где  $k = m, 2m, \dots, n - m$ .

Система уравнений (5) является системой с семидиагональной матрицей коэффициентов, в каждой строке которой один из элементов, находящийся либо слева, либо справа от главной диагонали, является нулевым.

После вычисления параметров  $Y_k$  и  $Y_{k+1}$  остальные искомые неизвестные находятся в каждом из  $L$  интервалов распараллеливания независимо по формуле (4). Параллельный алгоритм 1 состоит из следующих шагов:

$$(3) \rightarrow (5) \rightarrow (4)$$

Задачи (3) могут быть решены методом пятиточечной прогонки (формулы метода пятиточечной прогонки см. в работе <sup>8</sup>).

Задача (5) решается методом семиточечной прогонки (вывод формул метода семиточечной прогонки приводится в §2 главы 1).

<sup>8</sup> Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. С. 97–99.



Алгоритмы прогонки являются корректными и устойчивыми, если при вычислении прогоночных коэффициентов не происходит деления на нуль и для основных прогоночных коэффициентов выполняется неравенство  $|\alpha_i| \leq 1$ , гарантирующее невозрастание погрешности  $\epsilon_i = \tilde{y}_i - y_i$  (см. <sup>8,9</sup>).

В работе <sup>7</sup> исследовалась редуцированная система уравнений при условии, что для системы уравнений (1) выполняется условие диагонального преобладания. В §1 и §2 исследуется корректность и устойчивость параллельных алгоритмов трехточечной и пятиточечной прогонки в зависимости от соотношения коэффициентов исходных систем уравнений.

Основной результат следующий.

1. Если для исходных систем уравнений с переменными коэффициентами выполняются достаточные признаки корректности и устойчивости методов решения систем – трехточечной и пятиточечной прогонки, то аналогичные признаки, усиливаясь, выполняются и для соответствующих редуцированных систем уравнений.

2. Если в изолированных точках исходных систем уравнений с постоянными и кусочно-постоянными коэффициентами на интервалах распараллеливания признаки корректности и устойчивости методов не выполняются, то при определенном соотношении коэффициентов редуцированные системы уравнений являются системами с диагональным преобладанием и их можно решать соответствующими устойчивыми методами прогонки.

Выпишем для системы трехточечных уравнений (1) достаточные признаки корректности и устойчивости метода решения системы – прогонки <sup>9</sup>.

$$\text{Признак А. } \frac{|C_i| - |A_i| - |B_i|}{|C_i| + |A_i| + |B_i|} \geq \theta, \quad \theta > 0, \quad \max\{|C_k|, |A_k|, |B_k|\} \geq C > 0.$$

$$\text{Признак В. } |C_i| \geq |A_i| + |B_i| + \delta, \quad \delta > 0.$$

Справедливо следующее соотношение признаков:  $A \rightarrow B$ .

**Теорема 1.** Если для исходной системы уравнений (1) выполняются достаточные признаки корректности и устойчивости метода прогонки А или В, то в обоих случаях для редуцированной системы уравнений будут выполняться признаки А и В.

Далее рассмотрим систему с кусочно-постоянными коэффициентами на интервалах распараллеливания  $(k, k+m)$

$$\begin{cases} C_0 Y_0 - Y_1 = F_0, & i = 0, \\ -Y_{i-1} + RY_i - QY_{i+1} = F_i, & i = k+1, \dots, k+m-1, \\ -Y_{k-1} + C_k Y_k - B_k Y_{k+1} = F_k, & k = m, 2m, \dots, n-m, \\ -Y_{n-1} + C_n Y_n = F_n, & i = n. \end{cases} \quad (6)$$

<sup>9</sup> Годунов С.К., Рябенкий В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977. 439 с.



В системе (6) все уравнения поделены на один из коэффициентов.

**Теорема 2.** Если коэффициенты исходной системы (6) удовлетворяют следующим условиям: 1. а)  $|R| \geq |Q| + 1 + \delta$ ,  $\delta > 0$ ;

б)  $|C_0| \geq 1$  или  $|C_0| \leq \frac{1}{|R|} - \delta'$ , где  $\delta' \simeq \frac{|Q^{m-1}|}{|R^{m-1}|}$ ;

2. а)  $B_k$  и  $Q$  имеют одинаковые знаки и  $|C_k| \leq \frac{|B_k| + |Q|}{|R|}$

или б)  $B_k$  и  $Q$  имеют разные знаки и  $|C_k| \leq \frac{|B_k|}{|R|} - 1$ , причем хотя бы одно из неравенств – строгое, тогда для редуцированной системы уравнений выполняется в случае а) условие строгого диагонального преобладания матрицы системы:  $|\bar{C}_k| \geq |\bar{A}_k| + |\bar{B}_k| + \bar{\delta}$ ,  $\bar{\delta} = \delta_1 - \delta' \cdot |B_k|$ ,  $\delta_1 \simeq \frac{|Q^3|}{|R^3|}$ ; в случае б) условие нестрогого диагонального преобладания матрицы системы:  $|\bar{C}_k| \geq |\bar{A}_k| + |\bar{B}_k|$ , и она решается методом обычной прогонки, причем решение устойчиво.

**Следствие.** Если ни одно из условий 2 теоремы 2 не выполняется, то редуцированная система уравнений при  $|C_k| < |B_k| + 1$  решается методом немонойтонной прогонки.

Теорема 2 обобщается на случай кусочно-постоянных коэффициентов  $R_{k+m}$  и  $Q_{k+m}$  на интервалах распараллеливания  $(k, k + m)$ .

Достаточные признаки устойчивости для системы (2) располагаются в порядке ослабления следующим образом:

Признак А.  $|C_i| \geq |A_i| + |B_i| + |D_i| + |E_i| + \delta$ ,  $\delta > 0$ .

Признак В: 1.  $|C_i| \geq |A_i| + |B_i| + |E_i| + \delta$ ,  $\delta > 0$ ;

или 2.  $|C_i| \geq |A_i| + |D_i| + |E_i| + \delta$ ,  $\delta > 0$ ,

где  $C_i = \max\{|B_i|, |C_i|, |D_i|\}$ .

Признак С.  $|C_i| \geq |A_i| + |E_i| + \delta$ ,  $\delta > 0$ .

Справедливо следующее соотношение признаков:  $A \rightarrow B \rightarrow C$ .

Достаточные признаки устойчивости для системы (5) имеют вид

Признак  $\bar{A}$ : 1.  $|\bar{C}_k| \geq |\bar{A}_k| + |\bar{B}_k| + |\bar{D}_k| + |\bar{E}_k| + |\bar{H}_k| + \bar{\delta}$ ,  $\bar{\delta} > 0$ ;

и 2.  $|\bar{C}_{k+1}| \geq |\bar{G}_{k+1}| + |\bar{A}_{k+1}| + |\bar{B}_{k+1}| + |\bar{D}_{k+1}| + |\bar{E}_{k+1}| + \bar{\delta}$ ,  $\bar{\delta} > 0$ .

Признак  $\bar{B}$ : 1.  $|\bar{C}_k| \geq |\bar{A}_k| + |\bar{B}_k| + |\bar{E}_k| + |\bar{H}_k| + \bar{\delta}$ ,  $\bar{\delta} > 0$ ;

и 2.  $|\bar{C}_{k+1}| \geq |\bar{G}_{k+1}| + |\bar{A}_{k+1}| + |\bar{D}_{k+1}| + |\bar{E}_{k+1}| + \bar{\delta}$ ,  $\bar{\delta} > 0$ .

Признак  $\bar{C}$ : 1.  $|\bar{C}_k| \geq |\bar{A}_k| + |\bar{E}_k| + |\bar{H}_k| + \bar{\delta}$ ,  $\bar{\delta} > 0$ ;

и 2.  $|\bar{C}_{k+1}| \geq |\bar{G}_{k+1}| + |\bar{A}_{k+1}| + |\bar{E}_{k+1}| + \bar{\delta}$ ,  $\bar{\delta} > 0$ .

Справедливо следующее соотношение признаков:  $\bar{A} \rightarrow \bar{B} \rightarrow \bar{C}$ .

**Теорема 3.** *Имеют место следующие соотношения признаков:*

$$A \rightarrow \bar{A}; \quad B(1) \rightarrow \bar{A}(2) \text{ и } \bar{B}(1); \quad B(2) \rightarrow \bar{A}(1) \text{ и } \bar{B}(2); \quad C \rightarrow \bar{C}.$$

Для системы пятиточечных уравнений с постоянными коэффициентами  $S, P, R, Q, T$  во внутренних точках интервалов распараллеливания  $(k, k+m+1)$ ,  $k = 0, m, \dots, n-m$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_0 Y_0 - D_0 Y_1 + E_0 Y_2 = F_0, \quad i = 0; \\ -B_1 Y_0 + C_1 Y_1 - D_1 Y_2 + E_1 Y_3 = F_1, \quad i = 1; \\ SY_{i-2} - PY_{i-1} + RY_i - QY_{i+1} + TY_{i+2} = F_i, \\ \quad i = k+2, \dots, k+m-1; \\ A_k Y_{k-2} - B_k Y_{k-1} + C_k Y_k - D_k Y_{k+1} + E_k Y_{k+2} = F_k, \\ \quad k = m, m+1, \dots, n-m+1; \\ A_n Y_{n-2} - B_n Y_{n-1} + C_n Y_n - D_n Y_{n+1} = F_n, \quad i = n; \\ A_{n+1} Y_{n-1} - B_{n+1} Y_n + C_{n+1} Y_{n+1} = F_{n+1}, \quad i = n+1; \end{array} \right. \quad (7)$$

имеет место следующая

**Теорема 4.** *Если коэффициенты системы (7) удовлетворяют условиям:*

1. а)  $|R| \geq |S| + |P| + |Q| + |T| + \delta$ ,  $\delta > 0$ ,  $R^2 < |PQ(P+Q)|$ ;
- б)  $S, P, R, Q, T$  одного знака;  $A_k, B_k, D_k, E_k$  одного знака;
2. а) при  $|B_k| \leq |A_k|$ ,  $|D_{k+1}| \leq |E_{k+1}|$ ,

$$|C_k| + |D_k| \leq |B_k \frac{Q}{R}| + |E_k \frac{S}{R}|; \quad |C_{k+1}| + |B_{k+1}| \leq |A_{k+1} \frac{T}{R}| + |D_{k+1} \frac{P}{R}|;$$

или б) при  $|B_k| \geq |A_k|$ ,  $|D_{k+1}| \geq |E_{k+1}|$ ,

$$|C_k| + |D_k| \leq |A_k \frac{Q}{R}| + |E_k \frac{S}{R}|; \quad |C_{k+1}| + |B_{k+1}| \leq |A_{k+1} \frac{T}{R}| + |E_{k+1} \frac{P}{R}|;$$

или с) при  $|B_k| \leq |A_k|$ ,  $|D_{k+1}| \geq |E_{k+1}|$ ,

$$|C_k| + |D_k| \leq |B_k \frac{Q}{R}| + |E_k \frac{S}{R}|; \quad |C_{k+1}| + |B_{k+1}| \leq |A_{k+1} \frac{T}{R}| + |E_{k+1} \frac{P}{R}|;$$

или д) при  $|B_k| \geq |A_k|$ ,  $|D_{k+1}| \leq |E_{k+1}|$ ,

$$|C_k| + |D_k| \leq |A_k \frac{Q}{R}| + |E_k \frac{S}{R}|; \quad |C_{k+1}| + |B_{k+1}| \leq |A_{k+1} \frac{T}{R}| + |D_{k+1} \frac{P}{R}|,$$

тогда для системы (5) выполняется условие диагонального преобладания матрицы системы, т.е. имеет место признак  $\bar{A}$ :

$$|\bar{C}_k| \geq |\bar{A}_k| + |\bar{B}_k| + |\bar{D}_k| + |\bar{E}_k| + |\bar{H}_k| + \bar{\delta},$$

$$|\bar{C}_{k+1}| \geq |\bar{G}_{k+1}| + |\bar{A}_{k+1}| + |\bar{B}_{k+1}| + |\bar{D}_{k+1}| + |\bar{E}_{k+1}| + \bar{\delta}, \quad \bar{\delta} > 0;$$

и она решается методом прогонки, причем решение устойчиво.

Параллельный алгоритм 2 отличается от алгоритма 1 тем, что в узлах разбиения отрезка задаются произвольные значения параметров. В результате исходная задача разбивается на независимые подзадачи с заданными краевыми условиями. Искомые значения в узлах находятся в явном виде.

Построим параллельный алгоритм 2 для системы пятиточечных уравнений вида

$$\begin{cases} A_i Y_{i-2} - B_i Y_{i-1} + C_i Y_i - D_i Y_{i+1} + E_i Y_{i+2} = F_i, \\ Y_0 = F_0, \quad Y_1 = F_1, \quad Y_n = F_n, \quad Y_{n+1} = F_{n+1}, \quad i = 2, \dots, n-1. \end{cases} \quad (8)$$

Отрезок  $(0, n+1)$  разобьем на  $2(L-1)$  пересекающихся интервалов вида  $(0, k+1)$  и  $(k, n+1)$ ,  $k = m, 2m, \dots, n-m$  (рис. 3).

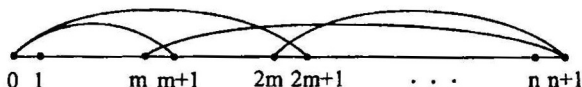


Рис. 3. Разбиение отрезка на пересекающиеся интервалы

Точки разбиения отрезка  $k, k+1$  выберем в качестве узлов распараллеливания. Зададим в них произвольные значения  $Y_k^0, Y_{k+1}^0$ . В результате задача (8) разбивается на  $2(L-1)$  независимую подзадачу с краевыми условиями  $F_0, F_1, F_n, F_{n+1}$ .

Для фиксированного  $k$  на интервалах  $(0, k+1)$  и  $(k, n+1)$  имеем две независимые краевые задачи, после решения которых находятся  $Y_{k-2}^1, Y_{k-1}^1$  и  $Y_{k+2}^2, Y_{k+3}^2$ .

Далее на отрезке  $(k-2, k+3)$  решаем задачу

$$\Lambda_h Y_i^3 = F_i, \quad Y_{k-2}^3 = Y_{k-2}^1, \quad Y_{k-1}^3 = Y_{k-1}^1, \quad Y_{k+2}^3 = Y_{k+2}^2, \quad Y_{k+3}^3 = Y_{k+3}^2, \quad i = k, k+1. \quad (9)$$

Значения (9) в точках  $k, k+1$  берем в качестве новых краевых условий  $Y_k^1, Y_{k+1}^1$ , и т.д.

Будем иметь  $Y_k^0, Y_k^1, \dots \rightarrow Y_k^*, \quad Y_{k+1}^0, Y_{k+1}^1, \dots \rightarrow Y_{k+1}^*$ .

Искомые решения  $Y_k^*, Y_{k+1}^*$  получим в явном виде. Записывая (9) в точках  $k, k+1$ , имеем систему из двух уравнений с двумя неизвестными  $Y_k^1$  и  $Y_{k+1}^1$  для каждого  $k$ , которую представим в векторной форме

$$\bar{P}\bar{Y}^1 = \bar{A}\bar{Y}^0 + \bar{B}. \quad (10)$$

Если определитель системы (10)  $|\Delta| \neq 0$ , то матрица  $\bar{P}$  обратима и

$$\bar{Y}^1 = \bar{G}\bar{Y}^0 + \bar{D}, \quad \bar{G} = \bar{P}^{-1} \cdot \bar{A}, \quad \bar{D} = \bar{P}^{-1} \cdot \bar{B}.$$

Для произвольного  $\bar{Y}^S$  имеет место представление

$$\bar{Y}^S = \tilde{G}^S \bar{Y}^0 + \bar{D} \sum_{j=0}^{S-1} \tilde{G}^j.$$

**Теорема 5.** Если для исходной системы (8) выполняется условие:

$$|C_k| \geq |A_k| + |B_k| + |D_k| + |E_k| + \delta, \quad \delta > 0, \quad (11)$$

тогда  $|\Delta| = |C_k C_{k+1} - B_{k+1} D_k| \neq 0$ ;  $\|\tilde{G}\| = \max_{1 \leq i \leq 2} \sum_{j=1}^2 |G_{ij}| < 1$  и искомое решение записывается в явном виде

$$\bar{Y}^* = \lim_{S \rightarrow \infty} \bar{Y}^S = (E - \tilde{G})^{-1} \cdot \bar{D}. \quad (12)$$

Рассмотрим систему пятиточечных уравнений с постоянными коэффициентами  $S, P, R, Q, T$  во внутренних точках интервалов распараллеливания следующего вида

$$\begin{cases} SY_{i-2} - PY_{i-1} + RY_i - QY_{i+1} + TY_{i+2} = F_i, & i = 2, \dots, k-1, k+2, \dots, n-1, \\ A_k Y_{k-2} - B_k Y_{k-1} + C_k Y_k - D_k Y_{k+1} + E_k Y_{k+2} = F_k, \\ A_{k+1} Y_{k-1} - B_{k+1} Y_k + C_{k+1} Y_{k+1} - D_{k+1} Y_{k+2} + E_{k+1} Y_{k+3} = F_{k+1}, \\ Y_0 = F_0, \quad Y_1 = F_1, \quad Y_n = F_n, \quad Y_{n+1} = F_{n+1}. \end{cases} \quad (13)$$

Нас будет интересовать случай, когда в изолированных точках системы  $k$  и  $k+1$  нарушается условие (11), т.е. имеет место

$$|C_k| < |A_k| + |B_k| + |D_k| + |E_k|.$$

**Теорема 6.** Если коэффициенты системы (13) удовлетворяют условиям:

1.  $|R| \geq |S| + |P| + |Q| + |T| + \delta, \quad \delta > 0, \quad |Q| \geq |T|$  и  $S, P, R$  одного знака;
2.  $|A_k| \cdot \left( \frac{|T|+1}{|R|} \right) + |B_k| \cdot \left( \frac{|Q|+|T|+1}{|R|} \right) + |E_k| \cdot \left( \frac{|P|+|S|}{|R|-|Q|} \right) < |C_k| < |A_k| + |B_k| + |E_k|$
3.  $|A_{k+1}| \cdot \left( \frac{|Q|+|T|+1}{|R|} \right) + |D_{k+1}| \cdot \left( \frac{|P|+|S|}{|R|-|Q|} \right) + |E_{k+1}| \cdot \left( \frac{|PS|+|P^2-SR|}{|R^2-PQ|-|QR-TR|} \right) < |C_{k+1}| < |A_{k+1}| + |D_{k+1}| + |E_{k+1}|,$

тогда выполняются условия обоснования метода

$$|\Delta| = |C_k C_{k+1} - B_{k+1} D_k| \neq 0, \quad \|\tilde{G}\| = \max_{1 \leq i \leq 2} \sum_{j=1}^2 |G_{ij}| < 1 \text{ и решение}$$

системы (10) сходится к искомым  $Y_k^*, Y_{k+1}^*$  и имеет вид (12).

В §3 построены и исследованы с точки зрения устойчивости параллельные алгоритмы матричной прогонки для решения систем уравнений блочно-трехдиагональными матрицами коэффициентов

$$\begin{cases} C_0 \bar{Y}_0 - B_0 \bar{Y}_1 = \bar{F}_0, & i = 0, \\ -A_i \bar{Y}_{i-1} + C_i \bar{Y}_i - B_i \bar{Y}_{i+1} = \bar{F}_i, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ -A_N \bar{Y}_{N-1} + C_N \bar{Y}_N = \bar{F}_N, & i = N, \end{cases} \quad (14)$$

где  $\bar{Y}_i$  — искомые векторы размерности  $n$ ,  $\bar{F}_i$  — заданные векторы размерности  $n$ ,  $A_i, B_i, C_i$  — квадратные матрицы порядка  $n$ .

К таким системам сводятся разностные задачи для эллиптических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами в области  $P$ .

Будем предполагать, что исходная область  $P$  представляет собой прямоугольник. При построении параллельного алгоритма исходную область  $P$  разобьем на  $L$  подобластей вертикальными линиями так, что  $N = L \times M$ . В качестве параметрических неизвестных выберем векторы  $\bar{Y}_K, K = 0, M, \dots, N$ , связывающие неизвестные на сетке по вертикали.

Относительно  $\bar{Y}_K$  строится редуцированная система уравнений. В под областях, определяемых интервалами  $(K, K+M)$ , рассматриваются следующие задачи:

$$\begin{cases} -A_i \bar{U}_{i-1}^1 + C_i \bar{U}_i^1 - B_i \bar{U}_{i+1}^1 = 0, & \bar{U}_K^1 = (10 \dots 0), & \bar{U}_{K+M}^1 = (00 \dots 0), \\ \dots & \dots & \dots \\ -A_i \bar{U}_{i-1}^n + C_i \bar{U}_i^n - B_i \bar{U}_{i+1}^n = 0, & \bar{U}_K^n = (00 \dots 1), & \bar{U}_{K+M}^n = (00 \dots 0), \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} -A_i \bar{V}_{i-1}^1 + C_i \bar{V}_i^1 - B_i \bar{V}_{i+1}^1 = 0, & \bar{V}_K^1 = (00 \dots 0), & \bar{V}_{K+M}^1 = (10 \dots 0), \\ \dots & \dots & \dots \\ -A_i \bar{V}_{i-1}^n + C_i \bar{V}_i^n - B_i \bar{V}_{i+1}^n = 0, & \bar{V}_K^n = (00 \dots 0), & \bar{V}_{K+M}^n = (00 \dots 1), \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} -A_i \bar{W}_{i-1} + C_i \bar{W}_i - B_i \bar{W}_{i+1} = \bar{F}_i, & \bar{W}_K = (00 \dots 0), & \bar{W}_{K+M} = (00 \dots 0), \end{cases} \quad (17)$$

где  $i = K+1, \dots, K+M-1$ .

**Теорема 7.** Если  $\bar{U}_i^1, \dots, \bar{U}_i^n$  — решения задач (15),  $\bar{V}_i^1, \dots, \bar{V}_i^n$  — решения задач (16),  $\bar{W}_i$  — решения задач (17), а  $\bar{Y}_i$  — решения исходной задачи (14) на  $(K, K+M)$ , тогда

$$\bar{Y}_i = (\bar{U}_i^1 \bar{U}_i^2 \dots \bar{U}_i^n) \bar{Y}_K + (\bar{V}_i^1 \bar{V}_i^2 \dots \bar{V}_i^n) \bar{Y}_{K+M} + \bar{W}_i. \quad (18)$$

После подстановки соотношений (18) в точках  $K = 0, M, \dots, N$  в исходную систему (14) получим систему уравнений относительно параметрических неизвестных — векторов  $\bar{Y}_K$ . Эта система уравнений по своей структуре аналогична (14), имеет меньшую размерность и следующий вид:

$$\begin{cases} [C_0 - B_1 U_1] \bar{Y}_0 - [B_1 V_1] \bar{Y}_M = \bar{F}_0 + B_1 \bar{W}_1, & K = 0, \\ -[A_K U_{K-1}] \bar{Y}_{K-M} + [C_K - A_K V_{K-1} - B_K U_{K+1}] \bar{Y}_K - [B_K V_{K+1}] \bar{Y}_{K+M} = \\ = \bar{F}_K + A_K \bar{W}_{K-1} + B_K \bar{W}_{K+1}, & K = M, \dots, N-M, \\ -[A_N U_{N-1}] \bar{Y}_{N-M} + [C_N - A_N V_{N-1}] \bar{Y}_N = \bar{F}_N + B_N \bar{W}_{N-1}, & K = N, \end{cases} \quad (19)$$

где  $U_K$  и  $V_K$  — матрицы размерности  $n \times n$ .

Задача (19) решается классическим алгоритмом матричной прогонки на одном процессоре. Задачи (15)–(17) решаются независимо на  $L$  интервалах распараллеливания на  $L$  процессорах. После вычисления параметров  $\bar{Y}_K$  остальные искомые неизвестные находятся по формуле (18) также независимо на каждом из  $L$  интервалов на  $L$  процессорах.

Схема параллельного алгоритма матричной прогонки 1 имеет вид:

$$(15) - (16) - (17) \rightarrow (19) \rightarrow (18).$$

**Теорема 8.** Если для исходной системы (14) выполняется условие

$$\|C_i\| \geq \|A_i\| + \|B_i\| + \delta, \quad \delta > 0,$$

тогда для системы (19) имеет место

$$\|C_K - A_K V_{K-1} - B_K U_{K+1}\| \geq \|A_K U_{K-1}\| + \|B_K V_{K+1}\| + \delta.$$

**Теорема 9.** Если для системы (14) выполняются достаточные условия устойчивости метода матричной прогонки по А.А. Самарскому

$$\|C_0^{-1} B_0\| \leq 1, \quad \|C_N^{-1} A_N\| \leq 1, \quad \|C_i^{-1} A_i\| + \|C_i^{-1} B_i\| \leq 1, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

причем хотя бы одно из неравенств — строгое, то эти же условия достаточны и для устойчивости метода матричной прогонки при решении системы уравнений (19) относительно параметров  $\bar{Y}_K$ .

Параллельный алгоритм матричной прогонки 2 построим для системы векторных уравнений вида

$$\Delta \bar{Y}_i = \bar{F}_i, \quad \bar{Y}_0 = \bar{F}_0, \quad \bar{Y}_N = \bar{F}_N, \quad (20)$$

$$\Delta \bar{Y}_i \equiv -A_i \bar{Y}_{i-1} + C_i \bar{Y}_i - B_i \bar{Y}_{i+1}, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

где  $\bar{Y}_i$  — искомые векторы размерности  $n$ ;  $\bar{F}_i$  — заданные векторы размерности  $n$ ;  $A_i, B_i, C_i$  — матрицы размерности  $n \times n$ .

Исходную область разобьем на  $L$  — подобластей (рис. 4).

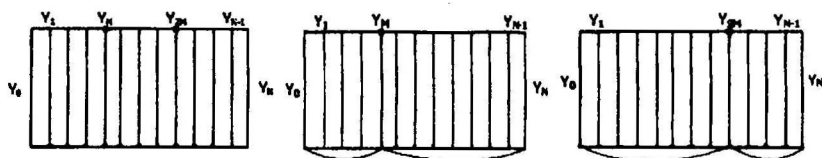


Рис. 4. Схема разбиения области для  $L = 3$

Зададим на границах подобластей произвольные значения векторов  $\bar{Y}_{lM}^0$ ;  $l = 1, \dots, L-1$ . В результате задача (20) разбивается на  $2(L-1)$  независимых подзадач с краевыми условиями  $\bar{F}_0, \bar{F}_N, \bar{Y}_{lM}^0$ , а именно:

$$\begin{cases} \Delta \bar{Y}_i^1 = \bar{F}_i, \bar{Y}_0^1 = \bar{F}_0, \bar{Y}_M^1 = \bar{Y}_M^0, & i = 1, \dots, M-1; \\ \Delta \bar{Y}_i^2 = \bar{F}_i, \bar{Y}_M^2 = \bar{Y}_M^0, \bar{Y}_N^2 = \bar{F}_N, & i = M+1, \dots, N-1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta \bar{Y}_i^4 = \bar{F}_i, \bar{Y}_0^4 = \bar{F}_0, \bar{Y}_{2M}^4 = \bar{Y}_{2M}^0, & i = 1, \dots, 2M-1; \\ \Delta \bar{Y}_i^5 = \bar{F}_i, \bar{Y}_{2M}^5 = \bar{Y}_{2M}^0, \bar{Y}_N^5 = \bar{F}_N, & i = 2M+1, \dots, N-1; \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} \Delta \bar{Y}_i^{3L-5} = \bar{F}_i, \bar{Y}_0^{3L-5} = \bar{F}_0, \bar{Y}_{N-M}^{3L-5} = \bar{Y}_{N-M}^0, & i = 1, \dots, N-M+1; \\ \Delta \bar{Y}_i^{3L-4} = \bar{F}_i, \bar{Y}_{N-M}^{3L-4} = \bar{Y}_{N-M}^0, \bar{Y}_N^{3L-4} = \bar{F}_N, & i = N-M+1, \dots, N. \end{cases}$$

Решая задачи (21), найдем

$$\bar{Y}_{M-1}^1, \bar{Y}_{M+1}^2, \bar{Y}_{2M-1}^4, \bar{Y}_{2M+1}^5, \dots, \bar{Y}_{N-M-1}^{3L-5}, \bar{Y}_{N-M+1}^{3L-4}.$$

Далее в подобластях, определяемых интервалами  $(M-1, M+1)$ ,  $(2M-1, 2M+1), \dots, (N-M-1, N-M+1)$ , решаем сеточные задачи

$$\begin{aligned} \Delta \bar{Y}_M^3 &= \bar{F}_M, \bar{Y}_{M-1}^3 = \bar{Y}_{M-1}^1, \bar{Y}_{M+1}^3 = \bar{Y}_{M+1}^2; \\ \Delta \bar{Y}_{2M}^6 &= \bar{F}_{2M}, \bar{Y}_{2M-1}^6 = \bar{Y}_{2M-1}^4, \bar{Y}_{2M+1}^6 = \bar{Y}_{2M+1}^5; \\ \dots \Delta \bar{Y}_{N-M}^{3L-3} &= \bar{F}_{N-M}, \bar{Y}_{N-M-1}^{3L-3} = \bar{Y}_{N-M-1}^{3L-5}, \bar{Y}_{N-M+1}^{3L-3} = \bar{Y}_{N-M+1}^{3L-4}; \end{aligned} \quad (22)$$

значения которых в точках  $M, 2M, \dots, N-M$  возьмем в качестве новых краевых условий  $\bar{Y}_{lM}^1$ ;  $l = 1, \dots, L-1$  для задач (21), и т. д.

Последовательность  $\bar{Y}_{lM}^0, \bar{Y}_{lM}^1, \bar{Y}_{lM}^2, \dots$  сходится к искомым решениям  $\bar{Y}_{lM}^*$  на границах  $L$  - подобластей для задачи (20).

Наиболее экономичным алгоритм является в случае разбиения исходной области на две подобласти для  $N = 2 \cdot M$ . Тогда задача (20) разбивается на две подзадачи вида (21) с краевыми условиями  $\bar{F}_0, \bar{Y}_M^0$  и  $\bar{Y}_M^0, \bar{F}_N$ .

В случае  $L = 2$  по принципу суперпозиции решения в подобластях определяются следующим образом:

$$\bar{Y}_i = U_i \bar{F}_0 + V_i \bar{Y}_M^* + \bar{W}_i, \quad i = 1, \dots, M-1; \quad (23)$$

$$\bar{Y}_i = U_i \bar{Y}_M^* + V_i \bar{F}_N + \bar{W}_i, \quad i = M+1, \dots, N-1;$$

где матрицы  $U_i$ ,  $V_i$  и вектор  $\bar{W}_i$  — решения задач (15)–(17),  $\bar{Y}_M^*$  — искомое решение на границе подобластей. Для произвольных  $\bar{Y}_M^n$  имеет место

$$\bar{Y}_M^n = Q^n \bar{Y}_M^0 + \bar{P} \sum_{j=0}^{n-1} Q^j.$$

**Теорема 10.** Если для системы (20) выполняются достаточные условия устойчивости метода матричной прогонки по А.А. Самарскому

$$\|C_0^{-1} B_0\| \leq 1, \quad \|C_N^{-1} A_N\| \leq 1, \quad \|C_i^{-1} A_i\| + \|C_i^{-1} B_i\| \leq 1, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

причем хотя бы одно из неравенств — строгое, тогда  $\|Q\| < 1$  и неизвестные на границе подобластей имеют вид

$$\bar{Y}_M^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{Y}_M^n = (E - Q)^{-1} \bar{P}, \quad (24)$$

где матрица  $Q$  и вектор  $\bar{P}$  вычисляются по формулам

$$Q = C_M^{-1} A_M V_{M-1} + C_M^{-1} B_M U_{M+1}, \quad (25)$$

$$\bar{P} = C_M^{-1} A_M [U_M^{-1} \bar{F}_0 + \bar{W}_{M-1}] + C_M^{-1} B_M [V_{M+1} \bar{F}_N + \bar{W}_{M+1}] + C_M^{-1} \bar{F}_M.$$

§4 иллюстрирует применение алгоритмов распараллеливания прогонки при распараллеливании двумерных сеточных задач. Подход к распараллеливанию сеточной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике, предложенный в работе <sup>10</sup>, применяется при решении двумерной краевой задачи для бигармонического уравнения. При помощи  $P$ - трансформации векторов задача сводится к  $n$  системам скалярных пятиточечных уравнений, алгоритмы распараллеливания которых рассмотрены в §2. При разбиении исходного прямоугольника на подобласти  $P$ - трансформацию векторов можно выполнять в каждой подобласти независимо и вычислять при помощи алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ).

**Вторая глава** посвящена анализу параллельных свойств и эффективности параллельных алгоритмов решения двумерных задач — задачи Дирихле для уравнения Пуассона и задачи многокомпонентной диффузии.

Проблему согласования параллельного алгоритма со структурными особенностями МВС можно решить, если использовать представление алгоритма в виде информационных структур, представляющих собой перечень операций или операторов и взаимосвязей между ними по информации <sup>11</sup>.

<sup>10</sup> Коновалов А.Н., Бугров А.Н., Елинов В.В. Алгоритмы распараллеливания сеточных задач // Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск: Наука, 1979. С. 95–99.

<sup>11</sup> Сталларов Л.Н., Абрамов В.М. Организация параллельных вычислений, учитывающая особенности вычислительной системы // Комплексы программы математической физики. Новосибирск: ВЦ и ИТФПМ СО РАН, 1980. С. 250–262.



В §1 построены информационные структуры (ИС) параллельных алгоритмов для решения систем уравнений с трехдиагональными и пятидиагональными матрицами. ИС исследуемых алгоритмов изображены в виде графов в ярусно-параллельной форме. В каждом ярусе собраны операции, не зависящие друг от друга по информации. Проведен структурный анализ алгоритмов, сравнение их параллельных свойств и показана возможность их эффективной реализации на МВС.

В §2 рассматриваются способы распараллеливания метода разделения переменных (МРП) решения сеточной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольной области и проводится анализ эффективности распараллеливания.

Предложено два способа распараллеливания метода разделения переменных, отличающихся распределением исходных данных вертикальными либо горизонтальными полосами по процессорам.

В случае горизонтального разбиения исходной области на  $L$  подобластей искомая и заданная функции, представленные в виде рядов, разбиваются на  $L$  частей и каждый из процессоров вычисляет свою часть функций. Краевые задачи решаются методом обычной прогонки.

В случае вертикального разбиения исходной области на  $L$  подобластей искомая и заданная функции вычисляются на процессорах независимо. Краевые задачи решаются с помощью параллельных алгоритмов прогонки.

Получена теоретическая оценка эффективности параллельного МРП с учетом времени межпроцессорных обменов

$$E_m \simeq \frac{(3N)t_c + (N+2)t_y + t_d}{(3N+3+3m/N)t_c + (N+7+2m/N)t_y + (1+m/N)t_d + 16mt_o/N}, \quad (26)$$

где  $N$  — число узлов квадратной сетки;  $t_c, t_y, t_d$  — времена выполнения арифметических операций сложения, умножения и деления, соответственно;  $m$  — число процессоров, равное числу подобластей;  $T_o = 16Nt_o$  — время для выполнения обменных операций,  $t_o$  — время, необходимое для пересылки элемента данных из одного процессора в другой.

Обозначим  $t = t_c$ . Тогда для МВС-1000 (в грубом приближении) можно полагать  $t_y \simeq t$ ,  $t_d \simeq 10t$ ,  $t_o \simeq 500t$  и оценка (26) принимает вид

$$E_m^1 \simeq \frac{(4N+12)t}{(4N+20+15m/N)t + 16mt_o/N}. \quad (27)$$

В §3 проведен анализ эффективности параллельного алгоритма матричной прогонки. Получена теоретическая оценка эффективности для параллельного алгоритма матричной прогонки для сетки размерности  $N \times N$

$$E_m^2 \simeq \frac{(3+6/N)t}{(6+9/N+3m^2/N+6m^2/N^2)t + (4/N+6/N^2)t_o}. \quad (28)$$

Построены графики изменения эффективности  $E_m^1$  параллельного МРП и графики  $E_m^2$  параллельного алгоритма матричной прогонки в зависимости от числа процессоров  $m$  для МВС-1000. Оценки и графики подтверждаются численными экспериментами.

В табл. §2 приведены времена счета на МВС-1000 и коэффициенты ускорения и эффективности решения модельной задачи Дирихле с помощью последовательного и параллельного МРП для  $1000 \times 1000$  точек сетки и сравнение с параллельным алгоритмом Гаусса-Зейделя.

МРП существенно сокращает время счета (на несколько порядков) при высокой эффективности распараллеливания  $0.94 \leq E_m^1 \leq 0.98$ .

В табл. §3 приведены времена счета на МВС-1000 и коэффициенты ускорения и эффективности решения СЛАУ с блочно-трехдиагональными матрицами размерности  $30000 \times 30000$  (блоки размерности 25) с помощью последовательного и параллельного алгоритма 1 матричной прогонки. Для числа процессоров  $m \leq 15$  имеем достаточно высокую эффективность распараллеливания  $0.75 \leq E_m^2 \leq 0.78$ .

В §4 рассматривается решение задач многокомпонентной диффузии с помощью параллельного алгоритма матричной прогонки.

При моделировании процессов, сопровождающихся диффузионным массопереносом в многокомпонентных системах, необходимо знать распределение концентраций диффундирующих компонентов. Диффузионный массоперенос описывается системой параболических дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial C_i}{\partial \tau} = \frac{1}{r^q} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^q \cdot \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{D}_{ij} \frac{\partial C_j}{\partial r} \right), \quad (29)$$

где  $N$  — число компонентов сплава;  $r$  — пространственная координата;  $C_j$  — концентрация  $j$ -го компонента;  $\tilde{D}_{ij}$  — парциальные коэффициенты взаимной диффузии;  $q$  — показатель степени, зависящий от симметрии задачи: 0 — для плоской, 1 — для цилиндрической, 2 — для сферической.

При использовании абсолютно устойчивой неявной разностной схемы система дифференциальных уравнений (29) сводится к системе уравнений с блочно-трехдиагональной матрицей. Для  $i$ -го компонента в  $k$ -м узле сетки система уравнений имеет вид

$$\sum_{j=1}^{N-1} \left[ a_{ik}^j C_j(k-1) + c_{ik}^j C_j(k) + b_{ik}^j C_j(k+1) \right] = d_k^i, \quad (30)$$

где  $a_{ik}^j, b_{ik}^j, c_{ik}^j, d_k^i$  — коэффициенты, рассчитываемые в зависимости от модели,  $C_j(k)$  — концентрация  $j$ -го компонента в  $k$ -м узле сетки.

На МВС-1000 решена тестовая линейная задача о диффузионном насыщении плоской металлической пластины  $(0, 1)$  единичной толщины с ну-

левой начальной концентрацией  $C_i^0$  компонентов и граничными условиями 1-го рода (на левом конце пластины) и 2-го рода (на правом) тремя компонентами с различной диффузионной подвижностью.

Результаты расчетов сравнивались с аналитическим решением. Результаты расчетов, полученные параллельным методом матричного прогонки, практически совпадают с аналитическим решением как в случае "неглубокого" проникновения диффундирующего компонента вглубь образца, так и в случае, когда он проникает до противоположной границы.

Параллельный алгоритм матричной прогонки использовался для моделирования эволюции выделений в двухфазном многокомпонентном сплаве (совместная работа с В.В. Поповым и И.И. Горбачевым).

Рассматривался сплав, состоящий из нескольких компонентов, в котором сосуществуют две фазы в твердом состоянии: основная фаза и частицы другой фазы, выделившиеся в результате некоторой предыдущей термической обработки. Для расчетов использовалась пошаговая процедура: на основании радиусов частиц и распределения концентраций в текущий момент  $t$  эти параметры пересчитывались для следующего шага по  $t$ . Система не является линейной, т.к. на каждом шаге коэффициенты диффузии  $\tilde{D}_{ij}$  зависят от концентраций в каждой ячейке.

Смоделировано поведение данной системы при заданном режиме термической обработки. Установлено изменение размеров частиц со временем с учетом протекания диффузии в основной фазе и в выделениях. Выполнен ряд расчетов эволюции карбонитридных выделений в сталях, микролегированных титаном, для сравнения с экспериментальными данными.

**Третья глава** посвящена параллельным алгоритмам решения трехмерных обратных задач гравиметрии и магнитометрии.

Одной из важнейших моделей строения земной коры является модель горизонтальной слоистой среды. В §1 рассматривается линейная обратная задача гравиметрии о нахождении переменной плотности  $\sigma = \sigma(x, y)$  в горизонтальном слое  $\Pi = \{(x, y, z) \in R^3 : (x, y) \in D, H_1 \leq z \leq H_2\}$ , где  $H_1, H_2$  — константы, либо криволинейном слое  $\Pi I = \{(x, y, z) \in R^3 : (x, y) \in D, H_1(x, y) \leq z \leq H_2(x, y)\}$  по гравитационным данным, измеренным на площади  $D = \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  земной поверхности. Используется априорная информация об отсутствии аномалий плотности вне слоя с криволинейными границами  $H_1 = H_1(x, y)$  и  $H_2 = H_2(x, y)$  такими, что  $H_1 < H_2 \quad \forall (x, y)$ , и выполняется условие  $H_i(x, y) \xrightarrow{z \rightarrow \pm \infty} h_i = \text{const}$ . При этом предполагается, что распределение плотности  $\sigma = \sigma(x, y)$  внутри слоя не зависит от  $z$  (ось  $z$  направлена вниз).

Решение задачи разбивается на два этапа. На первом этапе необходимо выделить из измеренного гравитационного поля аномального поля от

исследуемого слоя. Выделенное аномальное поле служит правой частью базового интегрального уравнения первого рода относительно искомой плотности. Методика выделения аномального поля предложена П.С. Мартышко и И.Л. Пруткиным в работе <sup>12</sup> и сводится к последовательному решению трех задач: решению задачи Дирихле для уравнения Лапласа на всей границе или части границы исследуемой области для исключения боковых источников поля, вычислению интегрального оператора для пересчета поля вверх и решению двумерного интегрального уравнения первого рода для пересчета поля вниз для исключения глубинных источников.

Второй этап связан с решением линейного двумерного интегрального уравнения Фредгольма первого рода для нахождения искомой плотности <sup>13</sup>

$$A\sigma \equiv f \int_a^b \int_c^d \left\{ \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H_1^2(x', y')]^{1/2}} - \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H_2^2(x', y')]^{1/2}} \right\} \sigma(x', y') dx' dy' = \Delta g(x, y), \quad (31)$$

где  $f$  — гравитационная постоянная,  $\Delta g(x, y)$  — гравитационный эффект, порождаемый источниками в горизонтальном или криволинейном слое.

После дискретизации уравнения на сетке, где задана  $\Delta g(x, y)$ , и аппроксимации интегрального оператора по квадратурным формулам задача (31) сводится к решению СЛАУ либо с симметричной положительно определенной матрицей (горизонтальный слой), либо с несимметричной матрицей (криволинейный слой). Так как уравнение (31) относится к классу некорректно поставленных задач, то СЛАУ, возникающее в результате дискретизации уравнения, является плохо обусловленной и преобразуется к виду (схема Лаврентьева)

$$(A + \alpha E)z = b, \quad (32)$$

где  $\alpha$  — параметр регуляризации.

В случае криволинейного слоя исходная матрица СЛАУ несимметрична, поэтому СЛАУ предварительно преобразуется к виду (схема Тихонова)

$$(A^T A + \alpha' E)z = A^T b, \quad (33)$$

где  $A^T$  — транспонированная матрица,  $\alpha'$  — параметр регуляризации.

Для решения уравнений (32) и (33) используются регулярные итерационные методы градиентного типа: метод минимальных невязок, метод

<sup>12</sup> Мартышко П.С., Пруткин И.Л. Технология разделения источников гравитационного поля по глубине // Геофизический журнал. 2003. Т. 25. № 3. С. 159–168.

<sup>13</sup> Мартышко П.С., Кокшаров Д.Е. Об определении плотности в слоистой среде по гравитационным данным // Геофизический журнал. 2005. Т. 27. № 4. С. 678–684.

наискорейшего спуска, метод минимальной ошибки и метод простой итерации (МПИ) в виде <sup>14</sup>

$$z^{k+1} = z^k - \frac{1}{\lambda_{\max}}[(A + \alpha E)z^k - b], \quad (34)$$

где  $\lambda_{\max}$  — максимальное собственное значение матрицы  $A + \alpha E$  (симметричный случай), и прямой метод квадратного корня (МКК) для решения СЛАУ с симметричной положительно определенной матрицей. Условием останова итерационных процессов является следующее:  $\frac{\|Az^k - b\|}{\|b\|} \leq \varepsilon$ .

Численная реализация и распараллеливание регулярных итерационных методов и МКК для решения линейной обратной задачи гравиметрии (31) выполнены на МВС-1000 с помощью библиотеки MPI на языке Фортран.

Распараллеливание итерационных методов градиентного типа основано на разбиении матрицы  $A$  горизонтальными полосами на  $m$  блоков, а вектора решения  $z$  и вектора правой части  $b$  СЛАУ на  $m$  частей так, что  $n = m \times L$ , где  $n$  — размерность системы уравнений,  $m$  — число процессоров. На каждой итерации каждый из  $m$  процессоров вычисляет свою часть вектора решения. В случае умножения матрицы  $A$  на вектор  $z$  каждый из  $m$  процессоров умножает свою часть строк матрицы  $A$  на вектор  $z$ . В случае матричного умножения  $A^T A$  каждый из  $m$  процессоров умножает свою часть строк транспонированной матрицы  $A^T$  на всю матрицу  $A$ . Host-процессор отвечает за пересылки данных и также вычисляет свою часть вектора решения. Для метода (34) максимальное собственное значение  $\lambda_{\max}$  матрицы  $A + \alpha E$  находится с помощью степенного метода с использованием параллельного алгоритма умножения матрицы на вектор.

Распараллеливание метода квадратного корня основано на разбиении матрицы  $A$  вертикальными линиями на  $m$  блоков. Диагональные элементы треугольной матрицы  $S$  ( $A = S^T S$ ) вычисляются на одном процессоре и рассылаются каждому процессору. Затем каждый из  $m$  процессоров вычисляет свою часть недиагональных элементов матрицы  $S$ . Обратный ход метода квадратного корня (нахождение решения СЛАУ) по рекуррентным формулам также выполняется на одном процессоре.

При реализации методики выделения аномального поля на МВС-1000 на этапе решения задачи Дирихле используется описанный во второй главе параллельный метод разделения переменных в двух вариантах либо параллельный вариант метода Гаусса-Зейделя; на этапе пересчета поля вверх при вычислении интегрального оператора используется параллельный алгоритм умножения матрицы на вектор, на этапе пересчета поля вниз при

<sup>14</sup> Васин В.В., Еремич И.И. Операторы и итерационные процессы Фейеровского типа. Теория и приложения. Екатеринбург: УрО РАН, 2005. 210 с.

решении интегрального уравнения используются регулярные параллельные итерационные методы градиентного типа.

В §1 приводятся результаты численных расчетов решения задач о восстановлении плотности в слое на МВС-1000 для реальных данных, измеренных в некоторых областях района Среднего Урала. На рисунках представлены линии уровня и распределение аномального поля, выделенного из исходного по методике предварительной обработки данных, а также линии уровня и распределение восстановленной плотности в слое. В таблицах приведены время счета, коэффициенты ускорения и эффективности параллельных алгоритмов. Эффективность распараллеливания является высокой:  $0.7 \leq E_m \leq 0.9$ . Результаты решения задач переданы в ИГФ УрО РАН для геофизической интерпретации.

При решении задачи о восстановлении плотности в слое с помощью параллельных алгоритмов на МВС-1000 матрица СЛАУ большой размерности (порядка 40000) формируется и хранится в памяти каждого процессора по частям, что дает эффективность распараллеливания  $E_m > 1$ .

В §2 описывается разработанный совместно с Д.В. Гемайдиновым специализированный Web-сервер, предназначенный для запуска программ, реализующих параллельные алгоритмы решения линейной обратной задачи гравиметрии на МВС-1000 через Web-интерфейс.

Комплекс параллельных алгоритмов для решения обратной задачи гравиметрии о нахождении переменной плотности в слое размещен на специализированном Web-сервере, установленном в ИММ УрО РАН.

В §3 рассматриваются нелинейные обратные задачи гравиметрии и магнитометрии в следующих постановках.

1. Рассматривается трехмерная структурная обратная задача гравиметрии о восстановлении поверхности раздела между средами по известному скачку плотности и гравитационному полю, измеренному на некоторой площади земной поверхности. Предполагается, что нижнее полупространство состоит из двух или трех слоев постоянной плотности, разделенных искомыми поверхностями  $S_1$  и  $S_2$ . В предположении, что гравитационная аномалия создана отклонением искомой поверхности  $S$  от горизонтальной плоскости  $z = H$  (ось  $z$  направлена вниз), в декартовой системе координат функция  $z = z(x, y)$ , описывающая искомую поверхность раздела, удовлетворяет нелинейному двумерному интегральному уравнению Фредгольма первого рода

$$A[z] \equiv f\Delta\sigma \iint_{a \ c}^{b \ d} \left\{ \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2(x', y')]^{1/2}} - \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H^2]^{1/2}} \right\} dx' dy' = G(x, y), \quad (35)$$

где  $f$  — гравитационная постоянная,  $\Delta\sigma$  — скачок плотности на границе раздела сред,  $G(x, y)$  — аномальное гравитационное поле,  $z = H$  — асимптотическая плоскость для данной геологической границы.

2. Рассматривается трехмерная структурная обратная задача магнитометрии по численному восстановлению разделяющей поверхности сред на основе данных о магнитном поле, измеренном на некоторой площади земной поверхности, и скачке вектора намагниченности. Функция  $z = z(x, y)$ , описывающая искомую поверхность раздела, удовлетворяет нелинейному двумерному интегральному уравнению Фредгольма первого рода

$$B[z] \equiv \Delta J \int_a^b \int_c^d \left\{ \frac{z(x', y')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2(x', y')]^{3/2}} - \frac{H}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + H^2]^{3/2}} \right\} dx' dy' = G_1(x, y), \quad (36)$$

где  $\Delta J$  — скачок вертикальной компоненты вектора намагниченности,  $G_1(x, y)$  — аномальное магнитное поле, обусловленное отклонением искомой поверхности от асимптотической плоскости  $z = -H$ .

Предварительная обработка гравитационных либо магнитных данных, связанная с выделением аномального поля, выполняется по методике <sup>12</sup>.

Уравнения гравиметрии и магнитометрии (35) и (36) являются существенно некорректными задачами.

После дискретизации уравнений (35) и (36), на сетке  $n = M \times N$ , где заданы правые части  $G(x, y)$  и  $G_1(x, y)$ , и аппроксимации интегральных операторов  $A$  и  $B$  по квадратурным формулам имеем системы нелинейных уравнений

$$A_n[z] = F_n. \quad (37)$$

Для решения систем уравнений вида (37) используется итеративно регуляризованный метод Ньютона <sup>15</sup>

$$z^{k+1} = z^k - [A'_n(z^k) + \alpha_k I]^{-1} (A_n(z^k) + \alpha_k z^k - F_n). \quad (38)$$

Здесь  $A_n(z^k)$  и  $F_n$  — конечномерные аппроксимации интегральных операторов и правых частей в уравнениях (35)–(36),  $A'_n(z^k)$  — производная Фреше операторов  $A$  либо  $B$  в точке  $z^k$ ,  $I$  — единичный оператор,  $\alpha_k$  — последовательность положительных параметров регуляризации.

Нахождение очередного приближения  $z^{k+1}$  по найденному  $z^k$  сводится к решению СЛАУ

$$A_n^k z^{k+1} = F_n^k, \quad (39)$$

где  $A_n^k = A'_n(z^k) + \alpha_k I$  — плохо обусловленная несимметричная заполненная  $n \times n$  матрица,  $F_n^k = A_n^k z^k - (A_n(z^k) + \alpha_k z^k - F_n)$  — вектор размерности  $n$ .

<sup>15</sup> Bakushinsky A., Goncharsky A. Ill-Posed Problems: Theory and Applications. London: Kluwer Akad. Publ., 1994. 256 p.



Обратимость матрицы  $A'_n(z^k) + \alpha_k I$  контролируется вычислением ее спектра. При исследовании спектра матрицы тщательный анализ показал, что для всех гравитационных и магнитных данных на каждой итерации метода Ньютона матрица имеет  $n$  различных неотрицательных собственных значений. Это позволяет проводить регуляризацию сдвигом и использовать метод (38). В реальных расчетах решается регуляризованное уравнение

$$A_n[z] + \alpha z = F_n, \quad \alpha > 0, \quad (40)$$

поэтому необходимо быть уверенным в том, что решение  $z_\alpha$  уравнения (40) аппроксимирует решение уравнения (37). Для двумерной задачи гравиметрии это свойство доказано в работе <sup>16</sup>. В трехмерном случае этот факт подтверждается многочисленными расчетами для квазимodelьных данных.

Численные расчеты, выполненные для модельных и реальных данных, показали, что при решении задач (35), (36) методом Ньютона приближенные решения дают вполне хорошую точность по невязке.

Подтверждение гипотезы о сходимости метода удалось получить в рамках аппарата доказательных вычислений.

В §3 проведены основные этапы доказательных вычислений, связанные с анализом сходимости метода Ньютона при решении обратной задачи гравиметрии. Идея доказательных вычислений принадлежит К.И. Бабенко <sup>17</sup> и заключается в том, что при подходящем начальном приближении проверяются численно все условия теоремы Ньютона-Канторовича с оценкой допускаемой погрешности, и при их выполнении делается вывод о сходимости метода. При проведении доказательных вычислений предполагается, что погрешность округления при вычислениях со стандартными типами данных на ЭВМ меньше необходимой, гарантирующей сходимость метода.

В первом варианте доказательных вычислений реализована следующая стратегия проверки условий теоремы Ньютона-Канторовича <sup>18</sup> (теорема 1).

За решение  $z^*$  принималось либо вектор, описывающий модельную (синтетическую) поверхность раздела, либо, в случае реальных данных, вектор  $z$ , полученный в результате  $\bar{k}$  шагов метода Ньютона (38) при условии, что вектор  $z^{\bar{k}}$  дает достаточно хорошее приближение по невязке для задачи (40):  $\|A_n z^{\bar{k}} - G\| < \epsilon$ .

Показано, что при подходящем выборе начального приближения  $z^0$  и параметра регуляризации  $\alpha$  условия теоремы 1 выполняются в итерационных точках при  $0 \leq k \leq \bar{k}$ , что позволяет заключить о справедливости оценки погрешности теоремы 1.

<sup>16</sup> Васин В.В., Агеев А.Л. Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: Наука, 1993. С. 216–218.

<sup>17</sup> Бабенко К.И., Петрович В.Ю. Доказательные вычисления в задаче о существовании решения удвоения // ДАН СССР. 1984. Т. 277. №2. С. 265–270.

<sup>18</sup> Багдалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1973. С. 412.



Условия теоремы 1 проверялись при решении задачи с реальными данными и задачи с квазимодельным решением для области  $S : 50 \times 60 \text{ км}^2$ ,  $h_x = 0.5$  и  $h_y = 2 \text{ км}$  — шаги сетки,  $\Delta\sigma = 0.5 \text{ г/см}^3$  — скачок плотности на поверхности раздела,  $f = 6.67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г} \cdot \text{см}^2$  — гравитационная постоянная,  $H = 5 \text{ км}$ . Синтетическое гравитационное поле  $G(x, y)$  определялось путем решения прямой задачи гравиметрии (35) для некоторой исходной поверхности раздела с добавлением случайного шума 5%, заданной формулой  $z(x, y) = 5 + (4/\pi) \arctg(2x/5 - 10) + \sin(\pi y/30)$ .

**Утверждение 1.** Пусть  $z_1 = z^*$  — точное решение уравнения  $F(z) \equiv A[z] - G(x, y) = 0$ ,  $z_2 = z^k$  — приближенное решение уравнения  $F(z) \equiv A[z] - G(x, y) + \alpha z = 0$  методом Ньютона на  $k$ -ой итерации.

Тогда при выборе  $z^0 \in (0.1, H + H/2)$  и подходящем выборе параметра регуляризации  $\alpha$  имеем значения констант

$$a = \max \|z^k - z^*\|, \quad a_1(k) = 1/\sqrt{\lambda_{\min}((A_n^k)^T A_n^k)}, \\ a_2(k) = \|F(z^*) - F(z^k) - F'(z^k)(z^* - z^k)\|/\|z^k - z^*\|^2, \\ c^{-1} = \max\{(a_1(k) \cdot a_2(k))^{-1}\}, \quad b = \min(a, c^{-1}),$$

при которых условия теоремы Ньютона-Канторовича <sup>18</sup> :

- 1)  $\|F'(z)^{-1}\| \leq a_1$  при  $z \in \Omega_a = \{z : \|z - z^*\| < a\}$ ;
- 2)  $\|F(z_1) - F(z_2) - F'(z_2)(z_1 - z_2)\| \leq a_2 \|z_2 - z_1\|^2$  при  $z_1, z_2 \in \Omega_a$ ;

выполнены в итерационных точках при  $0 \leq k \leq \bar{k}$  и справедлива оценка погрешности  $\|z^k - z^*\| \leq c^{-1}(c \cdot \|z^0 - z^*\|)^{2^k}$  (\*).

**Замечание.** При  $z^0 = H$  справедлива оценка  $\|H - z^*\| = \|z^0 - z^*\| \leq b$ .

Во втором варианте доказательных вычислений на основе теоремы Ньютона-Канторовича <sup>19, 20</sup> (теорема 2) показано, что при некотором начальном приближении выполнены все условия теоремы 2 для уравнения с квазимодельным решением, что позволяет сделать вывод о сходимости метода Ньютона с соответствующей оценкой погрешности.

**Утверждение 2.** Условия теоремы Ньютона-Канторовича <sup>20</sup> :

- 1)  $\|F'(z_0)^{-1}\| \leq m_0$ ,  $\|F'(z_0)^{-1}F(z_0)\| \leq \eta_0$ ;
- 2)  $\|F'(z_1) - F'(z_2)\| \leq N_2 \|z_1 - z_2\| \quad \forall z_1, z_2 \in B(z^*, R)$ ;
- 3)  $\eta_0 < \frac{1}{2m_0N_2}$ ,  $\frac{1 - \sqrt{1 - 2m_0\eta_0N_2}}{m_0N_2} \leq R$ ;

выполняются при выборе начального приближения  $z^0$ , достаточно близкого к точному решению и для  $z^* \in B(z_0, R)$  справедлива оценка погрешности  $\|z^* - z_0\| \leq \frac{1}{m_0N_2}(2m_0\eta_0N_2)^{2^n}$ ,  $n = 0, 1, \dots$  (\*\*).

Для задачи гравиметрии получена аналитическая оценка:

$$N_2 \leq f\Delta\sigma \cdot (b - a)^{1/2} \cdot (d - c)^{1/2} \cdot 2/z^3(x, y).$$

<sup>19</sup> Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. С. 680.

<sup>20</sup> Вакулинский А.Б., Кокурин М.Ю. Итерационные методы решения нерегулярных уравнений. М.: ЛЕНАНД, 2006. С. 14.

Численная реализация и распараллеливание алгоритмов решения нелинейных обратных задач гравиметрии и магнитометрии о нахождении поверхности раздела между средами выполнены на МВС-1000 с помощью библиотеки МРІ на языке Фортран.

На каждом шаге итеративно регуляризованного метода Ньютона для нахождения очередного приближения необходимо решение СЛАУ (39) с плохо обусловленной заполненной несимметричной матрицей.

Для решения СЛАУ используются регулярные параллельные варианты итерационных МПИ (34) и метода сопряженных градиентов (MSG) <sup>21</sup> для СЛАУ с симметричной матрицей, а также регулярные параллельные варианты прямых методов Гаусса и Гаусса-Жордана.

В случае применения итерационных методов система уравнений (39) предварительно приводится к виду

$$B^k z^{k+1} \equiv [(A_n^k)^T A_n^k + \alpha'_k I] z^{k+1} = (A_n^k)^T F_n^k \equiv b, \quad (41)$$

где  $(A_n^k)^T$  — транспонированная матрица,  $\alpha'_k$  — параметры регуляризации.

Распараллеливание метода сопряженных градиентов проводится по описанному выше принципу распараллеливания итерационных методов.

Распараллеливании методов типа Гаусса основано на том, что на каждом шаге каждый из  $m$  процессоров исключает неизвестные из своей части  $L$  уравнений. Host-процессор выбирает ведущий элемент среди элементов строки, модифицирует строку и рассылает ее остальным процессорам. При реализации процесса исключения Гаусса (матрица СЛАУ приводится к верхнетреугольной) все большее число процессоров постепенно начинает простаивать, т.к. с каждым шагом число уравнений СЛАУ уменьшается на единицу. Это уменьшает эффективность распараллеливания. При реализации метода Гаусса-Жордана (матрица СЛАУ приводится к диагональной) все процессоры выполняют вычисления со своей частью уравнений до конца и эффективность распараллеливания увеличивается.

В §3 приводятся результаты численных расчетов решения нелинейных задач гравиметрии и магнитометрии на МВС-1000 методом Ньютона для реальных гравитационных и магнитных полей, обработанных в различных областях (Средний Урал, Казахстан, Оренбург и Башкирия). Измерения и обработка гравитационных и магнитных полей выполнены сотрудниками ИГФ УрО РАН. На рисунках представлены восстановленные поверхности раздела. Проведен анализ эффективности и ускорения параллельных алгоритмов, которые уменьшают время решения задач. Результаты решения задач переданы в ИГФ УрО РАН для геофизической интерпретации.

<sup>21</sup> Фаддеев В.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Гос. издат. физ.-мат. лит., 1963. 735 с.

**Четвертая глава** посвящена распараллеливанию алгоритмов решения трехмерной задачи упругости и упруго-пластической задачи.

В §1 рассматривается решение статической задачи упругости методом граничных интегральных уравнений. Требуется найти решение системы уравнений Ламе в конечной трехмерной области  $D$ , ограниченной кусочно-гладкой поверхностью  $S$ :

$$\mu \Delta u_i(x) + (\lambda + \mu) \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_j(x)}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad (42)$$

$$\lambda, \mu - \text{константы Ламе, } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Используется непрямой вариант метода <sup>22</sup>, когда интегральное уравнение на границе области решается для некоторой вспомогательной функции, по которой определяется решение исходной задачи (компоненты вектора смещений и тензора напряжений) внутри и на границе области деформирования. Изначально метод граничных интегральных уравнений был реализован в виде комплекса программ МГИУ для персонального компьютера, разработанного сотрудниками Института горного дела СО РАН и предназначенного для решения трехмерных задач упругости с заданным на границе вектором усилий (В.И. Машуков).

В §1 описывается разработанный комплекс параллельных программ МГИУ-2 — модификация комплекса программ МГИУ с различными типами граничных условий. Для комплекса программ МГИУ-2 на границе области деформирования реализованы три вида граничных условий.

1) Вектор усилий  $F(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x))$ , действующий на элементарную площадку с нормалью  $n(x) = (n_1, n_2, n_3)$ , проходящую через точку  $x = (x_1, x_2, x_3)$ . Если  $u(x)$  — решение задачи (42), то  $F(x) = T(n(x))u(x)|_S$ , где  $T_{ij}(n(x))$  — оператор напряжения. Решение задачи (42) с заданным на границе  $F(x)$  ищется в виде потенциала простого слоя

$$u(x) = \int_S \Gamma(y-x) \varphi(y) dS_y,$$

где  $\Gamma(y-x)$  — матрица фундаментальных решений (матрица Кельвина).

Уравнение для определения неизвестной плотности  $\varphi(x)$  имеет вид

$$-\varphi(x) + \int_S T(n(x)) \Gamma(y-x) \varphi(y) dS_y = F(x). \quad (43)$$

2) Вектор смещений  $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$ . В этом случае исходная задача сводится к задаче с заданным вектором усилий на границе области.

<sup>22</sup> Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелайшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 663 с.

Уравнение для определения вектора усилий имеет вид

$$-F(x) + \int_S T(n(x))\Gamma(y-x)F(y)dS_y = \Phi(x), \quad (44)$$

где 
$$\Phi(x) = \int_S T(n(x))(T(n(y))\Gamma(y-x))'u(y))dS_y.$$

3) Смешанные граничные условия (на одной части границы — вектор усилий, на другой — вектор смещений). В случае смешанных граничных условий предложено использовать итерационный альтернирующий метод — алгоритм Шварца<sup>23</sup>, состоящий в последовательном решении исходной задачи упругости с поочередно заданными на границе вектором усилий либо вектором смещений.

Для численных расчетов проводится триангуляции граничной поверхности. Для случая тел вращения алгоритм автоматического построения триангуляции построен и реализован Т.И. Сережниковой.

В результате триангуляции граничной поверхности и дискретизации интегральных операторов задача упругости сводится к СЛАУ с заполненной матрицей. Для решения разрешающих систем уравнений используются параллельные итерационные методы градиентного типа: метод простой итерации с ускорением по Люстернику, метод наискорейшего спуска, метод минимальных ошибок и метод сопряженных градиентов.

Для комплекса программ МГИУ-2 при указанных выше граничных условиях разработаны и реализованы на МВС-1000 параллельные алгоритмы и программы для решения соответствующих граничных интегральных уравнений, вычисления компонент вектора смещений и тензора напряжений внутри и на границе области деформирования. Выполнены численные расчеты для модельных задач с анализом эффективности.

В 2001 г. комплекс параллельных программ МГИУ-2 передан в ИАПУ ДВО РАН для решения задач упругости на МВС-1000.

В §2 рассматривается использование и реализация параллельных алгоритмов при решении осесимметричной упруго-пластической задачи с малыми упругими и большими пластическими деформациями методом конечных элементов (совместная работа с И.П. Демешко и А.В. Коноваловым).

Рассматривается задача сжатия цилиндра плоскими плитами. Решение задачи основывается на принципе виртуальной мощности в скоростной форме с определяющими соотношениями для вектора скорости тензора напряжений<sup>24</sup>. Для моделирования больших деформаций процесс разбивается на шаги по приращениям нагрузки (в среднем 1 – 5 тысяч шагов).

<sup>23</sup> Соболев С.К. Алгоритм Шварца в теории упругости // ДАН. 1936. Т. 4 (13). С. 235–238.

<sup>24</sup> Коновалов А.В. Определяющие соотношения для упругопластической среды при больших пластических деформациях // Известия РАН. Механика твердого тела. 1997. № 5. С. 139–149.

С помощью конечно-элементной аппроксимации на каждом шаге нагрузки формируется СЛАУ с ленточной матрицей  $A$  большой размерности. Для решения СЛАУ использованы параллельные итерационные методы градиентного типа. Распараллеливание алгоритма решения задачи выполнено на всех этапах с анализом эффективности для МВС-1000.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Предложены и исследованы с точки зрения корректности и устойчивости прямые параллельные алгоритмы решения систем уравнений с трехдиагональными, пятидиагональными и блочно-трехдиагональными матрицами, реализованные при решении линейной и нелинейной задачи многокомпонентной диффузии с анализом эффективности распараллеливания.

2. Разработаны эффективные регулярные параллельные прямые и итерационные алгоритмы, реализованные при решении линейной обратной задачи гравиметрии о восстановлении плотности в горизонтальной слоистой среде для областей Среднего Урала, трехмерной задачи упругости и осесимметричной упруго-пластической задачи.

3. Для решения трехмерных нелинейных обратных задач гравиметрии и магнитометрии о нахождении поверхности раздела между средами на основе итеративно регуляризованного метода Ньютона выполнены основные этапы доказательных вычислений сходимости метода, разработаны параллельные вычислительные технологии и выполнены численные расчеты для реальных гравитационных и магнитных полей для различных областей (Средний Урал, Казахстан, Оренбург и Башкирия).

4. Разработан и реализован на МВС-1000 комплекс параллельных программ решения линейной обратной задачи гравиметрии и нелинейных обратных задач грави-магнитометрии на основе метода Ньютона с использованием регулярных параллельных прямых и итерационных алгоритмов.

5. Разработан и реализован на МВС-1000 комплекс параллельных программ МГИУ-2 решения трехмерной статической задачи упругости в ограниченных областях с различными типами граничных условий с использованием параллельных вычислительных технологий на всех этапах решения задачи и протестирован на серии модельных расчетов.

## Публикации по теме диссертации

*Статьи, опубликованные в научных журналах из списка ВАК*

- [1] Акимова Е.Н. Распараллеливание алгоритма матричной прогонки // Мат. моделирование. 1994. Т. 6. № 9. С. 61–67.
- [2] Акимова Е.Н. Параллельный алгоритм решения систем уравнений с пятидиагональными матрицами и исследование его устойчивости // Вестник ННГУ. 2009. № 2. С. 135–140.

- [3] Акимова Е.Н., Серезжникова Т.И. Распараллеливание алгоритма решения трехмерной задачи упругости методом граничных интегральных уравнений // Сиб. журн. вычисл. математики. 2000. Т. 3. № 2. С. 97–107.
- [4] Акимова Е.Н., Горбачев И.И., Попов В.В. Решение задач многокомпонентной диффузии с помощью алгоритма матричной прогонки // Мат. моделирование. 2005. Т. 17. № 9. С. 85–92.
- [5] Горбачев И.И., Попов В.В., Акимова Е.Н. Моделирование диффузионного взаимодействия карбонитридных выделений с аустенитной матрицей с учётом возможности изменения их состава // Физика металлов и металловедение. 2006. Т. 102. № 1. С. 22–32.
- [6] Акимова Е.Н., Белоусов Д.В. Решение обратной задачи гравиметрии с помощью параллельного алгоритма квадратного корня // Вестник УГТУ–УПИ. 2005. № 17 (69). С. 230–239.
- [7] Акимова Е.Н., Гемайдинов Д.В. Параллельные алгоритмы решения задачи гравиметрии о восстановлении плотности в слое // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13. № 3. С. 3–21.

### *Другие публикации*

- [8] Акимова Е.Н., Гемайдинов Д.В. Параллельные алгоритмы решения обратной задачи гравиметрии и организация удаленного взаимодействия между МВС–1000 и пользователем // Вычисл. методы и программирование. 2008. Т. 9. № 1. С. 133–144.
- [9] Akimova E.N. Parallelization of algorithm for solving the three-dimensional problem of elasticity // J. Mechanical Engineering. 2001. Vol. 5. № 52. P. 299–308.
- [10] Акимова Е.Н. Параллельные алгоритмы для решения трехмерной задачи упругости и разреженных линейных систем // Дальневост. мат. журн. 2001. Т. 2. № 2. С. 10–28.
- [11] Akimova E.N. Parallelization of an algorithm for solving the gravity inverse problem // J. Computational and Applied Mechanics. 2003. Vol. 4. № 1. P. 5–12.
- [12] Akimova E.N., Vasin V.V. Stable parallel algorithms for solving the inverse gravimetry and magnetometry problems // Intern. J. Engineering Modelling. 2004. Vol. 17. № 1–2. P. 13–19.
- [13] Акимова Е.Н. Об устойчивости распараллеливания немонотонной прогонки: препринт ВЦ СО АН СССР. Новосибирск, 1989. № 818. 18 с.
- [14] Акимова Е.Н. Об эффективности крупноблочного распараллеливания метода разделения переменных: препринт ВЦ СО АН СССР. Новосибирск, 1989. № 833. 21 с.
- [15] Акимова Е.Н. Исследование устойчивости алгоритма распараллеливания прогонки для решения систем пятиточечных уравнений // Высокопроизводительные вычисл. системы для комплексных центров мат. моделирования. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1991. С. 12–19.
- [16] Акимова Е.Н. Параллельные прямые методы решения разреженных линейных систем // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1995. Вып. 1. С. 47–60.
- [17] Акимова Е.Н. Распараллеливание алгоритма решения пространственной задачи упругости в случае заданного на границе вектора усилий // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1998. Вып. 2. С. 10–21.

- [18] *Akimova E.N.* Parallel direct algorithms for solution of sparse linear systems // Proc. 4th Intern. Conf. "Parallel Computing Technologies", Yaroslavl, September 8–12, 1997. Berlin: Springer-Verlag, 1997. P. 389–390. (Lecture Notes in Computer Science; 1277).
- [19] *Akimova E.N.* The parallel algorithm for solving the gravity inverse problem // Proc. 30th Intern. Summer School "Advanced Problems in Mechanics", St. Petersburg, June 27–July 6, 2002. СПб.: ИПМ РАН, 2002. P. 9–13.
- [20] *Акимова Е.Н.* Параллельные алгоритмы решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии на МВС-1000 // Труды междунар. научной конференции "Параллельные вычислительные технологии", Нижний Новгород, 30 мар.–3 апр. 2009 г. Челябинск: ЮУрГУ, 2009. С. 29–39.
- [21] *Акимова Е.Н., Демешко И.П., Коновалов А.Н.* Анализ быстродействия параллельных итерационных алгоритмов решения СЛАУ для упруго-пластических задач // Сб. статей 15-й Зим. школы по механике сплош. сред, Пермь, 26 февр.–3 мар. 2007 г. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. Ч. 1. С. 15–18.
- [22] *Васин В.В., Акимова Е.Н.* Параллельные алгоритмы решения трехмерной задачи упругости // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1999. Вып. 3. С. 34–47.
- [23] *Васин В.В., Акимова Е.Н.* Параллельный алгоритм решения трехмерной задачи упругости в случае смешанных граничных условий // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2000. Вып. 4. С. 63–75.
- [24] *Акимова Е.Н., Васин В.В.* Параллельный алгоритм решения обратной задачи гравиметрии на основе регуляризованного метода Ньютона // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2002. Вып. 6. С. 51–64.
- [25] *Akimova E.N., Vasin V.V.* Parallelization of algorithms for solving the inverse gravimetry and magnetometry problems // Proc. of 31st Intern. Summer School "Advanced Problems in Mechanics", St. Petersburg, June 22–July 2, 2003. СПб.: ИПМ РАН, 2003. P. 10–17.
- [26] *Akimova E.N., Vasin V.V.* Parallel iterative algorithms for solving the inverse gravity problems // Proc. 32nd Intern. Summer School "Advanced Problems in Mechanics", St. Petersburg, June 24–July 1, 2004. СПб.: ИПМ РАН, 2004. P. 1–8.
- [27] *Акимова Е.Н., Васин В.В.* Решение обратной задачи магнитометрии на многопроцессорном вычислительном комплексе МВС-1000 // Материалы 34-й сессии Междунар. семинара им. Д.Г. Успенского, Москва, 29 янв.–2 фев. 2007 г. М.: ИФЗ РАН, 2007. С. 8–11.
- [28] *Акимова Е.Н., Васин В.В.* Решение обратных геофизических задач на многопроцессорном вычислительном комплексе // Материалы междунар. конференции, посвящ. 50-летию Института геофизики УрО РАН, Екатеринбург, 4–8 февр. 2008 г. Екатеринбург: ИГФ УрО РАН, 2008. С. 4–7.
- [29] *Акимова Е.Н., Васин В.В.* Параллельные алгоритмы решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии на основе регуляризованного метода Ньютона [Электронный ресурс] // Материалы междунар. конференции "Математические методы в геофизике – 2008", Новосибирск, 13–15 окт. 2008 г. (CD-ROM). URL: <http://www.sssc.ru/Conf/mmg2008/index.html> (дата обращения: 08.07.2009).

